

2018~2019学年天津河西区天津市新华中学高一下学期期中数学试卷 (特长班)

一、选择题 (本大题共8小题, 每小题4分, 共32分)

1. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对边分别是 a, b, c , 若 $a = 3, b = \sqrt{3}, A = \frac{\pi}{3}$, 则 $B = ()$.
- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{5\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$ D. $\frac{2\pi}{3}$
2. 下列结论正确的是 ().
- A. 若 $ac < bc$, 则 $a < b$ B. 若 $a^2 < b^2$, 则 $a < b$
- C. 若 $a > b, c < 0$, 则 $ac < bc$ D. 若 $\sqrt{a} < \sqrt{b}$, 则 $a \geq b$
3. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $b^2 + c^2 = a^2 + bc$, 若 $\sin B \cdot \sin C = \sin^2 A$, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 ().
- A. 等腰三角形 B. 直角三角形 C. 等边三角形 D. 等腰直角三角形
4. 不等式 $\frac{3x-1}{2-x} \geq 1$ 的解集是 ().
- A. $\left\{x \mid \frac{3}{4} \leq x \leq 2\right\}$ B. $\left\{x \mid \frac{3}{4} \leq x < 2\right\}$
- C. $\{x \mid x > 2 \text{ 或 } x \leq \frac{3}{4}\}$ D. $\left\{x \mid x \geq \frac{3}{4}\right\}$
5. 等比数列前 n 项和为54, 前 $2n$ 项和为60, 则前 $3n$ 项和为 ().
- A. 54 B. 64 C. $66\frac{2}{3}$ D. $60\frac{2}{3}$
6. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1 (n \in \mathbf{N}^*), S_n$ 为其前 n 项和, S_5 的值为 ().
- A. 57 B. 61 C. 62 D. 63
7. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, na_{n+1} = 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) (n \in \mathbf{N}^*)$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 ().
- A. $a_n = n$ B. $a_n = 2n - 1$
- C. $a_n = \frac{n+1}{2n}$ D. $a_n = \begin{cases} 1, (n=1) \\ n+1, (n \geq 2) \end{cases}$
8. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2, n(a_{n+1} - a_n) = a_n + 1, n \in \mathbf{N}^*$, 若对于任意的 $t \in [0, 1], n \in \mathbf{N}^*$, 不等式 $\frac{a_{n+1}}{n+1} < -2t^2 - (a+1)t + a^2 - a + 3$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ().
- A. $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ B. $(-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$
- C. $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$ D. $[-1, 3]$

二、填空题 (本大题共6小题, 每小题4分, 共24分)

9. 在 $\triangle ABC$ 中, $BC = \sqrt{7}$, $AC = 3$, $AB = 2$, 则角 $A =$ _____ .

10. 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$, $AC = 3$, $B = 60^\circ$, 则 $\triangle ABC$ 的周长为 _____ .

11. 若不等式 $kx^2 + kx - \frac{3}{4} < 0$ 对一切实数 x 都成立, 则 k 的取值范围是 _____ .

12. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{3a_n + 1}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的第6项是 _____ .

13. 设 $S_n = 2 + 2^4 + 2^7 + 2^{10} + \cdots + 2^{3n+10}$ ($n \in \mathbf{N}_+$), 则 $S_n =$ _____ .

14. 已知数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 1$, $b_2 = 4$, $b_{n+2} = \left(1 + \sin^2 \frac{n\pi}{2}\right)b_n + \cos^2 \frac{n\pi}{2}$, 则该数列的前11项的和为 _____ .

三、解答题 (本大题共4小题, 共44分)

15. 解不等式.

(1) $(2-x)(x+3) < 2-x$.

(2) $\left|1 - \frac{2x-1}{3}\right| \leq 2$.

(3) 解关于 x 的不等式: $ax^2 - (a+1)x + 1 < 0$ ($a > 0$).

16. 在 $\triangle ABC$ 中, a 、 b 、 c 分别是角 A 、 B 、 C 的对边, 且 $\frac{\cos B}{\cos C} = -\frac{b}{2a+c}$.

(1) 求角 B 的大小.

(2) 若 $b = \sqrt{13}$, $a+c=4$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n , $n \in \mathbf{N}^*$, 且 $S_n = \frac{3}{2}a_n - \frac{1}{2}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 若 $b_n = \frac{2n}{a_{n+2} - a_{n+1}}$, 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ($n \in \mathbf{N}^*$), 证明 $T_n < \frac{3}{4}$.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 1 - \frac{1}{4a_n}$, 其中 $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) 设 $b_n = \frac{2}{2a_n - 1}$, 求证: 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列, 并求出 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 设 $c_n = \frac{4a_n}{n+1}$, 数列 $\{c_n c_{n+2}\}$ 的前 n 项和为 T_n , 是否存在正整数 m , 使得 $T_n < \frac{1}{c_m c_{m+1}}$ 对于 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, 若存在, 求出 m 的最小值; 若不存在, 请说明理由.